Variables, grandeurs et types

Yannis Delmas-Rigoutsos[0000−0002−9274−3316]

Laboratoire TECHNÉ, Université de Poitiers, EA 6316, France
yannis.delmas@univ-poitiers.fr

Résumé En France, les enseignements du collège abordent en informatique, en mathématiques et en sciences, les notions de variable, d'indéterminée et de grandeur. Plusieurs travaux [17,8,21] montrent les difficultés conceptuelles associées à ces notions, y compris chez les enseignants. En nous appuyant sur l'histoire et l'épistémologie de ces disciplines, nous clarifions ces notions. Nous formulons ensuite des recommandations curriculaires [1] en nous appuyant sur les concepts informatiques de substitution, de correspondance preuve–programme [9] et d'indirection [24,6,25]. Nous plaidons notamment pour l'exploitation de la substitution et du lien fondamental entre type computationnel et nature de grandeur.

Keywords: Didactique de l'informatique [cs.CY]· Épistémologie de l'informatique [cs.GL]· Didactique des mathématiques [math.HO]

1 Contexte et problématique

1.1 Besoin initial des apprenants

En France, le cycle 4 [2] introduit de nombreuses nouvelles notions. Parmi celles-ci la variable et d'autres notions proches, en mathématiques et en sciences : *indéterminée* et *inconnue* en calcul littéral, *variable* et *constante* en sciences.

Nous verrons que ces notions sont historiquement associées (sec. 1.2). Pour autant, leur épistémologie et leurs usages pratiques diffèrent. Plusieurs travaux antérieurs ont souligné la confusion qui pouvait en résulter pour les élèves et même pour certains enseignants, cf. [17,8,21] et leurs références. Les notions de variable et de grandeur étant des notions fondamentales, au sens de [9], elles sont omniprésentes en informatique et en sciences, y compris à un niveau élémentaire. Il serait donc pertinent de travailler leur conceptualisation afin d'alimenter des didactiques disciplinaires, ne serait-ce que pour réduire cette confusion.

Cet article a pour objectif d'analyser épistémologiquement la notion de variable informatique et les notions proches afin de proposer des pistes didactiques. Nous centrerons cette étude sur le cycle 4 (collège), mais quelques recommandations peuvent être pertinentes pour les cycles précédents. Après avoir rappelé le cadre curriculaire actuel et présenté quelques-uns des principaux jalons historiques les concernant, nous analyserons ces notions au regard des concepts informatiques de substitution (sec. 2), de correspondance preuve–programme (sec. 3.1) et d'indirection (sec. 3.2).

1. Définitions et recommandations sont récapitulées en fin d'article, sec. 4.
2. Cycle 4 : trois dernières années du collège (secondaire inférieur), 12–15 ans.

1.2 Éléments d'histoire : variables et notions associées

Les variables, grandeurs et notions associées sont extrêmement banales en sciences et en techniques, ce qui rend plus opaques leurs difficultés conceptuelles et par conséquent didactiques. Afin de les faire mieux apparaître et surtout d'expliciter leurs interrelations, rappelons quelques éléments de leur histoire.

Mesurage [3] et grandeurs Parlant de la science moderne, on cite souvent Galilée affirmant que la connaissance de l'Univers est écrite en « langue mathématique » [11, cit.]. Pour autant, le mouvement de mathématisation du monde qui nous entoure est beaucoup plus ancien et remonte aux débuts de l'écriture : les premières traces écrites ne transcrivent pas des phrases, mais des registres économiques, des nombres, accompagnés ou non de pictogrammes [7]. On trouve là déjà une première forme numérique : les entiers, et une première forme d'unités : les pictogrammes d'ovin, de bovin, etc.

Les mesurages sont d'abord des comptages : Pythagore définit le mesurage d'une grandeur comme la comparaison à une unité, ou à une de ses divisions [11], à l'image de l'arpenteur qui établit le côté d'une parcelle en reportant une longueur étalon. La découverte des irrationnels conduit à repenser le mesurage comme une comparaison de rapports de grandeurs. Ainsi, Euclide [11, cit.] axiomatise la *grandeur* à partir de trois opérations fondamentales : la comparaison de deux grandeurs de même nature, la comparaison de rapports de grandeurs, la multiplication d'une grandeur par un entier.

La situation reste, pour l'essentiel, inchangée jusqu'à la fin du 16^e^ siècle, quand Stevin affirme avec force l'unicité de nature des nombres [11, cit]. Prolongeant cette réflexion, Descartes identifie les nombres aux rapports de grandeurs, définit la multiplication scalaire et explique que le choix d'une unité permet d'appliquer le calcul des nombres à celui des grandeurs, sans pour autant assimiler les deux [11].

Aujourd'hui, ces conceptions sont toujours vivaces : les « rods and clocks » d'Einstein sont toujours une abstraction de l'arpentage antique. Pour autant, la métrologie contemporaine intègre d'autres chaînes de mesurage, plus complexes [20], telles que le mesurage d'une température par thermocouple.

Calculs et types La notion de *fonction* nait au 14^e^ siècle, en particulier chez Nicole d'Oresme, comme « qualité » ou grandeur d'un objet, associée à sa représentation graphique comme courbe [11, cit.]. Ceci installe durablement la longueur comme modèle universel de référence et jette les bases de la future analyse. À cette époque, fonctions et grandeurs ne sont pas conceptuellement séparées : une *variable* est simplement une grandeur qui peut varier.

La perspective évolue avec l'apparition des formalismes. Jusqu'à la fin du 16^e^ s., grandeurs et quantités sont désignées par des périphrases [4] : chose, [chose]

---

3. Hors citation, nous distinguons le mesurage et sa valeur, la mesure [20,3].
4. Diophante d'Alexandrie, au 3^e^ s. EC, utilise déjà une notation symbolique pour désigner une inconnue, mais il s'agit alors seulement d'une abréviation.

inconnue, plus petite grandeur, la première, la deuxième, etc. Les choses changent quand Viète crée le calcul littéral en désignant les grandeurs d'un problème par des lettres, complétées par un type (p. ex. « plano » pour une aire) [21]. Descartes systématise ensuite l'usage des lettres, sans type, et assigne le début de l'alphabet aux grandeurs connues et la fin aux inconnues [11]. Au milieu du 18^{e} s., Euler ajoute la conception de certaines fonctions comme des « expressions » [11, cit.]. Une variable est alors une grandeur qui apparait dans une expression.

L'algèbre contemporaine, qui prend son essor au 19^{e} s., inverse la perspective : les *indéterminées* sont d'abord des entités formelles, qui peuvent s'instancier, ensuite, dans des grandeurs effectives. Les équations elles-mêmes deviennent des objets mathématiques. Le mouvement se prolonge par la formalisation des mathématiques et l'introduction du concept de langage formel, à la fin du 19^{e} siècle et au début du 20^{e} : les lettres des variables deviennent de simples écritures formelles, dont la propriété fondamentale est de pouvoir être substituées par des termes. Les travaux de Dedekind [11] posent un jalon en construisant les nombres eux-mêmes à partir des entiers. C'est une première forme de raisonnement computationnel (au sens de : représentation de données), qui est ensuite considérablement développé par les recherches sur les fondements des mathématiques, et en particulier sur l'*Entscheidungsproblem*, notamment par Turing (machine universelle) et Church (λ-calcul). Ceux-ci aboutissent à la création de l'ordinateur puis de la science informatique. Ce terreau produit également une idée fondamentale qui fait explicitement le lien entre preuves logiques et programmes informatiques : la correspondance de Curry–Howard [13]. L'élimination des coupures d'un côté correspond à l'exécution de l'autre. L'objet central permettant de faire le lien entre les deux est le concept de *type*.

Les langages de programmation se multiplient au cours de l'histoire de l'informatique. Les *variables informatiques* sont une structure fondamentale de la plupart d'entre eux. Elles associent généralement un identificateur (éventuellement muet), un type de donnée (éventuellement contraint) et une valeur (mutable ou non, éventuellement indéfinie). Si l'identificateur rappelle les variables des mathématiques ou de la physique, il n'y a pas d'association fonctionnelle comme en mathématiques ni statistique comme en sciences.

1.3 Le curriculum du cycle 4 français actuel [16]

L'informatique fait l'objet d'un enseignement structuré à partir du cycle 4. Celui-ci introduit la « notion de variable informatique », notamment de « variables d'entrée et de sortie ». Le programme acte la proximité avec les notions de variable et de fonction mathématiques, mais en indiquant que les différences sont de forme et non de nature.

Les grandeurs physiques et géométriques les plus usuelles sont introduites à partir du cycle 2, mais pas la notion de grandeur. Chaque type de grandeur étudié est pratiqué de façon opératoire, en effectuant des comparaisons, des mesurages et des calculs. Épistémologiquement, le choix est fait d'appuyer la connaissance des nombres sur celle des quantités et des grandeurs, et non l'inverse.

Le calcul littéral apparait au cycle 4 et constitue une rupture épistémologique majeure, notamment par son recours à l'abstraction. En mathématiques, il permet d'exprimer les fonctions sous forme de termes formels, introduisant ainsi les variables pour l'algèbre et l'analyse. En sciences, il permet d'introduire les relations formelles entre grandeurs ainsi que les grandeurs-quotients. Pour autant, le lien n'est pas explicitement prévu avec l'informatique : l'enseignement présente les ≪ différents statuts de la lettre (indéterminée, variable, inconnue, paramètre) ≫, mais seulement d'une façon opératoire, par familiarisation.

2 De la variable à la substitution

Nous nous proposons maintenant d'éclairer la question de l'enseignement des variables et notions associées en explorant leur conceptualisation.

2.1 Indéterminée, substitution et calcul littéral

En logique, un terme est une suite de symboles qui se combinent selon des règles précises. Les termes élémentaires sont appelés atomes. L'algèbre des termes repose sur une opération fondamentale : la *substitution*. Par définition, la substitution d'un terme y à un atome a dans x, $x[a \rightsquigarrow y]$, est obtenue en remplaçant toutes les occurrences de a dans x par la suite y, au besoin en ajoutant des groupements comme des parenthèses.

En mathématiques, l'utilisation d'atomes abstraits permet d'introduire les notions de polynôme formel et de fraction rationnelle. Un atome libre utilisé uniquement aux fins d'être substitué est appelé une *indéterminée*. Le plus souvent il s'agit d'une majuscule de la fin de l'alphabet latin : X, $Y\ldots$ On utilise aussi beaucoup le mot ≪ variable ≫, mais de façon impropre puisqu'il n'y a pas là de référence à une grandeur.

En algèbre, cette notion de substitution, extrêmement féconde, est omniprésente, même si souvent implicite. Par exemple, on peut se représenter comme une substitution la multiplication par un scalaire dans un espace vectoriel [5], ou encore le produit de deux espaces vectoriels, $E \otimes F$, comme l'espace vectoriel engendré par les substitutions de $f \in F$ à l'unité dans $e \in E$ ([6]).

Qu'en est-il en pédagogie ? Les programmes évitent la confusion conceptuelle entre indéterminée, au sens d'écriture substituable, et variable, au sens d'écriture désignant une grandeur, mais la réintroduisent en effaçant ces deux notions devant la ≪ lettre ≫, le calcul sur les fractions rationnelles étant appelé ≪ calcul littéral ≫. D'un point de vue informatique, ceux-ci mettent en avant l'identificateur, plutôt que les notions sous-jacentes. Ceci pose des difficultés pour certains élèves qui rentrent plus difficilement dans l'abstraction et ont du mal à se

5. Par exemple comme la substitution à l'unité des coordonnées dans une base quelconque. P. ex. en dimension 2 : si $v = (6\,\mathrm{u},\ 12\,\mathrm{u})$, la substitution de $3\,\mathrm{u}$ à u donne : $v[\mathrm{u} \rightsquigarrow 3\,\mathrm{u}] = (6.3\,\mathrm{u},\ 12.3\,\mathrm{u}) = (18\,\mathrm{u},\ 36\,\mathrm{u}) = 3v$.

6. En réalité à ses coordonnées dans une base. D'autres applications sont courantes, telles que le polynôme caractéristique d'une matrice carrée M : $\det(\mathbf{1}[\mathrm{u} \rightsquigarrow X] - M)$.

représenter un calcul sur des noms, sans qu'ils soient des noms *de quelque chose*, cf. [8] et ses références. De la même façon, les collégiens doivent effectuer des résolutions d'équations sur des inconnues qui ne sont pas interprétées comme des grandeurs ; là encore, certains peinent à leur donner du sens [8].

2.2 Épistémologie des grandeurs

Or, en sciences, les variables sont des dénominations de grandeurs. Pour montrer l'intérêt pour la didactique de l'informatique de s'attacher au concept de grandeur, décrivons donc rapidement celui-ci.

Pour le Bureau international des poids et mesures, une grandeur est une ≪ propriété d'un phénomène, d'un corps ou d'une substance, que l'on peut exprimer quantitativement sous forme d'un nombre et d'une référence ≫ [3]. La notion antique a été conceptualisée par plusieurs auteurs au cours du 20^{e} s., notamment en termes d'espaces vectoriels [21]. Un autre courant épistémologique, dit opérationnaliste, veut qu'une grandeur soit seulement ce qu'on mesure avec les instruments appropriés [7]. De fait, il est habituel de ne guère faire de différence dans le langage courant entre une grandeur, sa valeur et sa ou ses mesures — on confond ainsi souvent la surface d'une figure, l'aire de cette surface et la mesure de cette aire [21]. C'est la conception qui prévalait dans l'enseignement primaire jusqu'aux années 1970 [12]. Cette approche, occultant les grandeurs, ne donne pas d'accès conceptuel à leur manipulation directe, seulement indirecte par l'intermédiaire des mesures. L'approche didactique actuellement conseillée, en revanche, qui ≪ [aborde] les grandeurs en dehors du nombre, à partir d'activités de comparaison directe, indirecte, avant l'introduction de l'étalon arbitraire est ainsi une proposition qui a suivi le mouvement de la réforme des mathématiques modernes et des activités d'éveil en sciences ≫ [17]. Ceci est, bien sûr, essentiel pour comprendre la nature conventionnelle de l'étalon [19], mais aussi permet d'éviter d'identifier une grandeur à un nombre : le nombre et l'unité, ensemble, *représentent* une grandeur. La dimension statistique de la mesure n'apparait pas au collège, qui nous intéresse ici, mais au lycée, et seulement à partir de la fin des années 1960 [23,17]. Est-ce trop récent, ou insuffisant ? ≪ Pour une part importante des professeurs des écoles stagiaires, une grandeur correspond à quelque chose de flou, de mal déterminé, de peu précis. [...] La comparaison des grandeurs directement, et non la comparaison de leurs mesures, n'est pas envisagée, or c'est elle qui permet de définir la grandeur physique. [...] Malgré leur formation universitaire en sciences au moins jusqu'au niveau L3 [licence], les futurs enseignants de mathématiques et de sciences physiques éprouvent, comme

7. Cf. [20,17]. Ce courant se développe suite aux réflexions de Mach, formalisées par Bridgman. Pour Ullmo (1969), la grandeur ≪ ne préexiste pas à sa mesure, comme une intuition sommaire l'a longtemps fait croire ≫. La Mécanique quantique entérine effectivement de façon structurelle le fait que tout mesurage perturbe le système observé et donc le fait qu'une grandeur ne puisse être séparée de son mesurage. Pour autant, plusieurs recherches récentes [2] décrivent cette théorie comme étant d'abord une forme de statistiques. Celle-ci ne serait donc qu'un formalisation du mesurage et, par conséquent, impropre à trancher seule la question de l'opérationnalisme.

les enseignants du premier degré, beaucoup de difficultés à définir le concept de ≪ grandeur ≫ ≫ [17]. L'approche euclidienne dépasse les simples représentations instrumentales, mais est-elle suffisante pour installer une représentation *conceptuelle* ? Ces observations suggèrent que non.

Élargissons notre vision des grandeurs grâce à la science contemporaine. De Galilée à Newton, la physique classique conçoit le mesurage comme l'observation d'un état du monde, absolu et extérieur, nonobstant la compréhension de la relativité de l'observation. Boltzmann opère un premier changement de perspective en raisonnant sur les grandeurs intensives (température, pression) ; il montre que celles-ci se comprennent moyennant l'existence un nombre seulement fini de degrés de liberté dans une quantité de matière donnée. Ce ne sont plus seulement les mesures qui ont une valeur statistique, mais certaines grandeurs elles-mêmes. Popper amène un second changement de perspective avec la méthode hypothético-déductive ; il montre que l'observation ne peut pas se comprendre seulement comme vérification, mais comme *épreuve* d'une théorie. Les grandeurs ne sont plus alors simplement des observables mesurables, ce sont des variables expérimentales, dont certaines, considérées comme indépendantes, sont contrôlées et les autres, dépendantes, sont observées. Cette approche, largement adoptée par les méthodologies scientifiques contemporaines, adosse le concept de grandeur à celui de *variable expérimentale*. À un niveau scolaire, il serait tout à fait possible d'aborder, de façon simplifiée ce concept, par exemple en envisageant des paramètres ou *variables de modèle*, très proches des *variables d'entrée et de sortie* du programme d'informatique.

2.3 Substitution et épistémologie de la variable informatique

Revenons maintenant à l'informatique. Le concept de variable y est particulièrement vaste. Limitons-nous à quelques aspects fondamentaux [9] :

2) Flux d'information : notion de variable d'entrée, de sortie, de paramètre ;
6) Modularité : la variable peut constituer une forme d'indirection ;
7) Codage : la valeur de la variable est codée en mémoire ;
8) Typage : la variable a un type de données (éventuellement mutable)
9) . . . qui définit les opérations qu'elle autorise.

En termes de flux d'information, une variable est un moyen de passer une valeur à l'aide d'un identificateur. Elle fournit deux opérations : la conservation d'une valeur, la substitution de sa valeur à son identificateur. Cette dernière constitue un premier lien entre variables mathématiques et informatiques. Notons que la substitution est également essentielle en physique : Einstein a abouti à sa théorie générale de la relativité en partant du constat que les lois physiques sont invariantes par substitution d'un système de référence à un autre et, en particulier, ne dépendent pas des unités [18,22]. Pour lui, la substitution devrait être un concept central de la physique [8].

8. Dans l'autre grand domaine de la physique fondamentale, la Mécanique quantique, la substitution joue également un rôle historique essentiel : l'opération dite de quantification est la substitution d'opérateurs hermitiens aux grandeurs numériques.

Cette perspective épistémologique, compatible avec l'approche euclidienne, peut-elle jeter quelque lumière sur les enseignements du cycle 4 ?

Prenons l'exemple de l'expression « 200 mL de lait » dans une recette de pâtisserie. Celle-ci peut se comprendre de deux façons : soit comme « (200 mL) de lait », une capacité appliquée à une substance, soit comme « 200 (millilitre·s de lait) », un scalaire, ou une quantité partitive, associée à une unité. Notons qu'il s'agit là d'un changement d'unité, même si le mot « millilitre·s » apparait toujours : dans d'autres cultures ou d'autres temps, on peut employer différentes unités de capacité selon la substance mesurée [9]. Si l'on n'a pas de verre doseur et qu'on utilise une balance, on peut également substituer des grammes de lait. Ceci est un premier jeu de substitution sur les unités. Deuxième type de substitution, déjà en œuvre dans le primaire, (une version simple de) la covariance qu'évoquait Einstein : utiliser une autre unité commensurable, litre, galon, pinte ou pot à yaourt. Enfin, un troisième type de substitution est possible, dès le primaire : si nous avons plus de convives, nous pouvons multiplier les quantités d'ingrédients *du côté des unités*. C'est ce que nous faisons quand nous prenons comme référence deux pots à yaourt plutôt qu'un seul dans la recette du gâteau au yaourt.

Cette dernière opération, complètement intégrée par la plupart des adultes, ne va pas de soi. Elle n'est possible que parce qu'il s'agit d'une grandeur de rapport (au sens des statistiques). Elle a du sens pour une durée, par exemple, mais pas pour une date ni pour une température. Les unités qui correspondent à des grandeurs de rapport se comportent (jusqu'à un certain point) comme des atomes substituables du calcul formel.

Les travaux classiques de Dehaene ont montré que nous disposons d'un « sens du nombre », d'une représentation des dénombrements. L'histoire suggère également que le dénombrement, c'est-à-dire le comptage de choses, précède le nombre abstrait —abstrait *stricto sensu*, c'est-à-dire privé de certaines de ses propriétés. Mathématiquement, même si c'est utile de l'oublier une fois une certaine aisance acquise, il y a toujours une unité présente. Quand nous écrivons « $5 + 8 = 13$ », nous utilisons, en réalité, « $5\,\mathrm{u} + 8\,\mathrm{u} = 13\,\mathrm{u}$ ». En cycle 2 [15], l'élève comprend que « 5 jetons + 8 jetons font 13 jetons » dépasse la matérialité des jetons : l'opération s'applique aussi bien à 5 et 8 boites. Ici aussi, la substitution pourrait être exploitée de façon plus explicite : ces boites peuvent être des dizaines et donc « 5 dizaines + 8 dizaines font 13 dizaines » [10]). Cette substitution, n'est pas un simple truc : c'est une opération fondamentale pour certaines grandeurs (de rapport), opération complexe, qui mérite en soi un apprentissage [11]. Le collégien pourrait ensuite s'appuyer sur cette compréhension pour mieux appréhender ses notions de grandeurs et de variables.

9. Selon Pressiat [21], Lebesgue remarquait déjà que « Toute question qui conduit à une multiplication est un problème de changement d'unité, ou d'objet [...] ».

10. Ce cas précis de substitution est utilisé par plusieurs méthodes d'enseignement de la numération, mais sans que l'opération de substitution soit toujours explicitée, ni exploitée dans sa généralité.

11. L'étudiant pourra retrouver cette complexité au premier cycle universitaire. Une multiplication peut être cardinale, ordinale, scalaire, vectorielle...

3 Pédagogie de l'abstraction

3.1 Nature de grandeur et type computationnel

Nous avons défendu l'intérêt didactique des jeux de substitution. Intéressons-nous maintenant à leurs limites.

Substitution et nature de grandeurs Considérons l'équation « $6\,\mathrm{m} \times 12\,\mathrm{m} = 72\,\mathrm{m}^2$ ». Imaginons de très grands carrés de chocolat ; cette équation se transpose à l'unité « carré·s-de-chocolat ». Par abstraction, il est donc possible de considérer l'unité comme un symbole substituable : « $6m \times 12m = 72m^2$ », soit « $6X \times 12X = 72X^2$ ». En termes logiques, on pourrait dire que cette unité, le mètre, peut être considéré soit comme une grandeur (la valeur $1\,\mathrm{m}$, p. ex. un mètre étalon), soit comme une unité idéale de mesure (le « *rod* » abstrait d'Einstein), soit comme une unité physique (cf. [5] pour plus de finesse), soit simplement comme un terme substituable. Est-ce un simple jeu d'écriture ? Pouvons-nous toujours faire cela ? Si l'on reprend un exemple précédent, qu'est-ce qui donne le droit de généraliser de « 5 jeton·s + 8 jeton·s = 13 jeton·s » à « 5 ce-qu'on-veut + 8 ce-qu'on-veut (le même) = 13 ce-qu'on-veut » ? À un premier niveau de réponse, on le peut parce qu'une analyse du raisonnement nous permet de montrer qu'on n'a pas utilisé de propriétés des jetons pour obtenir la première équation. Mais réfléchissons plus avant ; en réalité, on ne peut pas généraliser complètement : cette équation n'aurait pas de sens pour des dates ou des températures. En seconde analyse, il convient donc d'admettre que l'on a bien utilisé une propriété d'additivité : la grandeur « nombre de jeton·s », qui appartient à la nature de grandeur « cardinal », est une grandeur de rapport.

Épistémologie des natures de grandeur La question de la substitutabilité nous amène donc à considérer celle des natures de grandeurs.

En sciences, une grandeur regroupe essentiellement trois choses : un nombre, une unité de mesure [12] et une nature de grandeur. La définition standard de cette nature est d'être l'« aspect commun à des grandeurs mutuellement comparables » [3]. Nous retrouvons là une composante essentielle des grandeurs déjà soulignée par Euclide [11, cit.]. Notons que la nature est une question d'interprétation ; elle a une valeur ontologique. Par exemple, faut-il considérer que la longueur et la durée sont fondamentalement de même nature ? L'interprétation einsteinienne de la relativité suggère que oui, celle de Bell [1,10] que non. La question de la nature se pose aussi pour les grandeurs sans dimension comme le nombre d'Avogadro ou la constante de Boltzmann, qu'on peut voir, essentiellement, comme des facteurs de proportionnalité. Pour certains physiciens, le fait de se ramener à cette situation constitue même un objectif, ainsi Einstein : « Imagine that this has been realized [elimination of two universal constants to the benefit, for example of the mass and the radius of the electron] ; then there appear in the fundamental equations of physics only dimensionless constants » [5,

12. Ou plus généralement une référence, cf. [3], § 1.1, n. 2.

cit.]. On pourrait ainsi pousser à l'extrême la commodité de calcul qui veut que l'on supprime les unités et la nature de grandeur, ramenant des équations physiques à leur seule composante numérique.

Dans l'enseignement scolaire français, l'usage actuel, qui n'est pas formalisé dans les programmes, est d'escamoter les unités dans les calculs et de les faire réapparaitre dans les résultats. Dans le supérieur ceci peut aller jusqu'à poser certaines constantes comme égales à 1. Il n'y a là aucune difficulté théorique (c'est une application de la substitution) ni pratique (l'écriture est plus concise). Mais, pédagogiquement, ≪ de nombreux débats ont eu lieu et sont toujours d'actualité dans la communauté des didacticiens des mathématiques sur la façon dont on doit écrire les calculs sur les grandeurs [4, p. ex.] ≫ [17].

Nature, type et substitution Adoptons maintenant le point de vue de l'informatique. En termes de spécifications et de démonstrations, la nature des grandeurs spécifie quels traitements sont possibles, elle correspond donc précisément au *type computationnel* d'une variable.

Cette notion de type est associé à un résultat très puissant et pourtant remarqué très tôt dans l'histoire de la discipline : la correspondance preuve–programme, dite de Curry–Howard. Ses nombreux enseignements montrent l'importance du type, dont la formalisation peut aller jusqu'à un outil de preuve d'un programme, d'un côté, et la production d'un algorithme, de l'autre. Les types peuvent être ainsi conçus, notamment, comme des contraintes sur les données (par exemple de domaine de validité) ou, à l'inverse, comme la spécification des opérations que l'on peut effectuer dessus.

Implications didactiques La spécification des types est un outil essentiel de validité des algorithmes en informatique. Ceci suggère l'importance de bien garder trace de la nature d'une grandeur au cours d'un calcul. À titre personnel, nous avons été saisi, en corrigeant un jour une copie de statistiques, de lire qu'un·e étudiant·e avait trouvé la réponse ≪ 3 ≫ comme âge moyen du chef de famille dans un quartier de la ville (exprimé en années). Ce cas est probablement extrême, mais pas isolé. Un type ou une nature ont pour fonction essentielle de prévenir de tels écueils. L'histoire de la physique suggère une conclusion similaire : l'équation aux dimensions, qui est essentiellement une algèbre de natures à gros grains, a parfois eu une grande portée heuristique.

Une première approche scolaire pourrait consister à *rappeler* systématiquement unités ou natures de grandeur au cours d'un calcul. Certes, cela peut s'avérer parfois malcommode, p. ex. avec l'unité carré·s-de-chocolat, mais on pourrait imaginer une formulation iconique. Une autre, plus cohérente, qui se pratique dans l'enseignement scolaire allemand, consiste à *calculer avec les grandeurs* [21]. Par exemple, si ℓ est une variable représentant la longueur d'une tige, on peut écrire $x = 3 \times \ell$ et x désigne alors une grandeur et non une mesure ni un nombre. Dans un tel calcul, on peut alors substituer une valeur à une telle variable, qu'il s'agisse d'une mesure ou d'une valeur idéale : si l vaut $6\,\mathrm{cm}$, x vaut $3 \times 6\,\mathrm{cm} = 18\,\mathrm{cm}$.

Avec cette conceptualisation, c'est l'écriture sans unité « $3 \times 6 = 18\,\mathrm{cm}$ » qui devient formellement incorrecte : un nombre sans unité ne peut être égal à une valeur avec unité. Pour des élèves à l'aise avec l'abstraction numérique, on peut, bien entendu, admettre qu'ils formulent des calculs sans unité, en particulier pour les rendre plus lisibles ; il est important, dans ce cas, que le calcul soit *intégralement* sans unité : $3 \times 6 = 18$ », l'unité n'étant rétablie que dans l'énoncé du résultat, pas dans le calcul (y compris sa dernière étape). Quoi qu'il en soit, un calcul ne devrait jamais se résumer à "pousser du bois" : les éléments qui le composent doivent faire sens à tout moment.

Dans une perspective de didactique de l'informatique, l'écriture des unités dans les calculs, jusqu'au cycle 4 au moins, apparait comme un moyen de développer très tôt chez les élèves une première conscience du type computationnel.

3.2 Abstraction et indirection

Concluons cet article en approfondissant la question de l'abstraction, qui est l'apprentissage le plus radicalement nouveau apporté par le cycle 4.

Les différents processus d'abstraction Toute représentation théorique, en science, en mathématique, comme en informatique, est fondamentalement une *abstraction*, c'est-à-dire le résultat d'un processus visant à isoler une notion par rapport à d'autres. Si l'on suit Colburn et Shute [6], « Mathematics, being primarily concerned with developing inference structures, has information neglect as its abstraction objective. Computer science, being primarily concerned with developing interaction patterns, has information hiding as its abstraction objective » [13]. Nous pourrions ajouter que les sciences expérimentales ont le contrôle du contexte par un protocole comme objectif d'abstraction. Ces trois approches heuristiques ne peuvent que peser sur la représentation savante des grandeurs et des variables.

Du point de vue de ce processus d'abstraction, une variable, pour l'essentiel, « hides the details of how a symbolic token can serve as a location for changing data values in memory » [6]. Ceci nous conduit donc à examiner le statut épistémologique des variables informatiques sous l'angle du concept majeur d'indirection.

Indirection et pédagogie L'indirection est certainement une des opérations les plus profondes utilisées en informatique, en témoigne l'aphorisme de David

13. Nous ne suivrons pas ces auteurs quand ils considèrent ces approches comme systématiques : il y a, en mathématiques, du masquage d'information dans la pratique de l'utilisation de théorèmes, en particulier de construction ; à l'inverse, en informatique il est parfois nécessaire de négliger de l'information, par exemple dans certains choix d'indicateurs ou de représentation de données (résolution, compression avec pertes...). De la même façon, il peut y avoir une démarche de contrôle de contexte en mathématiques (la thèse classique de Lakatos [14] en atteste abondamment) comme en informatique (particulièrement en automatique ou en intelligence artificielle).

Wheeler, co-inventeur du sous-programme : « all problems in Computer Science can be solved by another level of indirection ». Si l'indirection est une notion d'informatique, elle est, en revanche, d'un usage très général en tant qu'opération intellectuelle. Il conviendrait, selon nous, de l'intégrer au socle fondamental.

Zilles [25], qui examine la manière d'enseigner la notion d'indirection en informatique, est gêné par ses définitions habituelles : « indirection is the ability to reference something using a name, reference, or container instead the value itself » est trop abstraite, quand les définitions concrètes (p. ex. « manipuler une donnée *via* son adresse ») sont trop étriquées. Nous proposons d'envisager l'indirection sous un autre angle. Pour nous, une indirection est le fait de désigner quelque chose, par exemple une grandeur, par un *signe arbitraire* qui peut fonctionnellement la remplacer et à quoi, pour exécuter un calcul, on *substitue* une valeur qui lui est attachée. L'indirection est donc une généralisation de l'arbitraire du signe linguistique, tel qu'il apparait, notamment, dans l'écriture alphabétique [14]. Comme pour le signe linguistique, l'indirection permet une forme de virtualisation : mutabilité de la valeur au cours du temps et démultiplication (plusieurs valeurs traitées parallèlement ou au choix), généralisation (subsomption, factorisation de plusieurs cas sous une même référence générale). En pratique, l'indirection permet aussi la non-référentialité (il n'est pas nécessaire que la référence, par exemple la variable, ait effectivement une valeur pour effectuer certains raisonnements ou certains calculs [15]), ainsi que les définitions récursives (`fact(n):=n*fact(n-1)`). L'indirection est donc une forme d'abstraction, de ce point de vue également. Par ailleurs, [24] note que l'ajout d'une couche d'indirection permet la flexibilité et une meilleure organisation — par exemple, l'accès systématique aux objets via des pointeurs permet le ramasse-miette (*garbage collection*). Ajoutons, enfin, que l'indirection peut présenter un intérêt cognitif : le nom, puisqu'il est arbitraire, permet d'expliciter une intention du concepteur.

Dans le cas des variables, il pourrait être intéressant, pédagogiquement, d'expliciter l'indirection qu'elles mettent en œuvre. En informatique : mutabilité, généralisation et choix judicieux du nom. En physique : mutabilité, généralisation et standardisation du nom. En mathématiques : généralisation, abstraction et non-référentialité. Ceci permettrait de ne pas laisser sous silence la forme d'abstraction mise en œuvre dans chaque discipline : négliger l'information est une dimension essentielle de l'épistémologie des mathématiques, la masquer est fondamental dans la compréhension de l'encapsulation et, plus généralement, de la modularisation en informatique, et le contrôle du contexte est une dimension essentielle de ce qui fait la méthode expérimentale en sciences. Incidemment, cela permettra de clarifier un point tout à fait problématique pour nombre d'élèves, et même encore d'étudiants : la polysémie du signe « = », instruction d'affectation dans nombre de langages de programmation (« `largeur=15;` »), relation dans

14. Pour autant, la sémiotisation, le recours à un signe, n'est pas toujours arbitraire, donc ne fait pas toujours recours à l'indirection, par exemple dans le cas des écritures idéographiques et syllabiques.

15. Pensons aux noms de domaines Internet, par exemple, ou à l'utilisation des URI par le web sémantique.

les équations (≪ $x^2+2x=4$ ≫), fait observé ou anticipé en contexte expérimental (≪ $\ell = 3\,\mathrm{cm}$ ≫).

4 Annexe : recommandations curriculaires pour le cycle 4

Cette annexe rassemble nos principales suggestions et recommandations, qu'il conviendrait de tester sur le terrain, ainsi que des définitions susceptibles de servir de guide aux enseignants.

4.1 Un *caractère* est une propriété d'un phénomène, d'un corps ou d'une substance, en principe observable. Une *grandeur* est un caractère ≪ que l'on peut exprimer quantitativement sous forme d'un nombre et d'une référence ≫ [3]. Pour les grandeurs ordinales, la référence est une échelle (p. ex. l'échelle sismologique de Richter) ; pour les grandeurs quantitatives, la référence est une *unité*. Le nombre et son unité constituent, ensemble, sa *valeur* ; il peut s'agir d'une *mesure*, résultat d'un *mesurage* ou plus généralement d'une observation, ou d'une valeur idéale, supposée ou hypothétique. Des ≪ grandeurs mutuellement comparables ≫ sont dites de même nature [3] ou de même *type*. L'opération de comparaison est la base de la compréhension du type d'une grandeur, indépendamment de tout mesurage. L'unité est un indice de ce type. Une *quantité* est une grandeur de type ≪ cardinal ≫.

4.2 Une *variable* est un signe arbitraire, son *nom* ou identificateur, associé à une donnée mutable, sa *valeur*, et à un *type* computationnel définissant les valeurs possibles. Le mot valeur s'entend au sens large, incluant le sens précédent (4.1) ; il ne s'agit pas seulement de nombres, mais de n'importe quels types d'objets ou de valeurs de grandeurs. L'exécution d'un calcul sur une variable *substitue* sa valeur à son identificateur. Son type définit les calculs applicables à une variable.

4.3 Nous recommandons d'adopter une approche transdisciplinaire unifiée en appliquant les définitions 4.1 et 4.2 aussi bien en informatique qu'en sciences ou qu'en mathématiques. Ceci permet de présenter les variables comme un moyen *abstrait* de raisonner en termes de flux de données (d'information) : variable d'entrée ou de sortie, variable (observable) expérimentale, variable (paramètre) d'une modélisation. Une variable représentant une grandeur, par indirection, peut donc signifier aussi bien sa valeur, une ou plusieurs mesures ou encore une valeur hypothétique. Cette définition est compatible avec une transposition scolaire des variables statistiques et aléatoires au lycée. Notre analyse suggère, en revanche, de séparer résolument les variables des *indéterminées* et des *inconnues*.

4.4 Quand une variable est quantitative, elle *représente* une grandeur et son type computationnel peut être assimilé à la nature de cette grandeur. Nous recommandons que cette notion soit explicitée dans l'enseignement scolaire en utilisant le mot ≪ type ≫. Il est de bonne pratique en informatique, en mathématiques comme en sciences qu'un identificateur soit ≪ parlant ≫ : le nom d'une variable devrait toujours évoquer le type de celle-ci ou de la grandeur qu'elle représente (hauteur h, vitesse v, liste d'éléments `elements`...). En particulier, un nom n'est pas nécessairement réduit à une lettre.

4.5 Une variable ou une grandeur *a* une valeur, mais elle n'*est* pas cette valeur. Nous recommandons que les grandeurs elles-mêmes puissent faire l'objet de calculs. Si ℓ est une variable représentant la longueur d'une tige, on peut donc écrire $x = 3 \times \ell$, le résultat étant une grandeur. Ce choix a deux conséquences. D'une part, on peut alors *substituer* une valeur à cette variable, qu'il s'agisse d'une mesure ou d'une valeur idéale : si ℓ vaut 6 cm, $x = 3 \times 6\,\text{cm} = 18\,\text{cm}$. D'autre part, il convient de conserver l'indication de l'unité au cours des calculs. Une explication de calcul pourrait même aller à rappeler les types, au-delà des seules unités. Bien sûr, on pourrait admettre qu'un élève à l'aise avec l'abstraction numérique des grandeurs puisse s'épargner l'écriture de ces unités, en particulier pour rendre plus lisibles certains calculs, mais, dans ce cas, ce choix doit être homogène tout au long d'un calcul.

4.6 L'abstraction du raisonnement est un des apprentissages majeurs du collège, dans la plupart des disciplines. Son abord est difficile pour de nombreux élèves. Il pourrait être intéressant pédagogiquement d'expliciter une partie du processus d'abstraction, afin d'en favoriser l'appropriation. Dans le cas des variables, en s'appuyant sur notre analyse de l'indirection, il pourrait être intéressant de montrer des exemples des mécanismes suivants : généralisation ; mutabilité, en informatique et en sciences ; définition par récurrence, en informatique et en mathématiques. En sciences, les grandeurs peuvent être vues comme les paramètres d'une situation expérimentale qu'il s'agit soit de contrôler soit d'observer. On peut ainsi faire le lien avec les variables d'entrée et de sortie d'un programme ou d'un modèle (physique ou informatique).

4.7 Nous suggérons d'expérimenter l'usage de la substitution pour aider à la compréhension de la nature conventionnelle de l'étalon, des conversions d'unités et des calculs de proportionnalité, par exemple sur le modèle de l'apprentissage de la numération au cycle 2, mais d'une façon qui serait explicite et plus adaptée au cycle 4.

Références

1. Bell, J.S. : How to teach special relativity. Progress in Scientific Culture **1**(2), 1–13 (1976), reprint in Speakable and unspeakable in quantum mechanics, Cambr. Un. Pr. (1987), p. 67–80.
2. Benavoli, A., Facchini, A., Zaffalon, M. : Quantum mechanics : The Bayesian theory generalized to the space of hermitian matrices. Phys. Rev. A **94**, 042106 (Oct 2016). https://doi.org/10.1103/PhysRevA.94.042106
3. BIPM (ed.) : Vocabulaire international de métrologie – Concepts fondamentaux et généraux et termes associés (VIM). JCGM, 3 edn. (2012), éd. 2008 corr.
4. Chevallard, Y., Bosch, M. : Les grandeurs en mathématiques au collège. Partie I : une Atlantide oubliée. Petit X pp. 5–32 (2001), http ://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Les%5Fgrandeurs%5Fau%5Fcollege%5FI.pdf
5. Cohen-Tannoudji, G. : Lambda, the fifth foundational constant considered by Einstein. Metrologia **55**(4), 486–498 (2018)
6. Colburn, T., Shute, G. : Abstraction in computer science. Minds & Machines **17**, 169–184 (2007). https://doi.org/10.1007/s11023-007-9061-7

7. Cook, B.F. : Le cunéiforme. In : Bonfante, L., Chadwick, J., Cook, B.F., Davies, W.V., Healey, J.F., Hooker, J.T., Walker, C.B.F. (eds.) La naissance des écritures, pp. 24–99. Seuil (1994)
8. Coppé, S., Grugeon, B. : Le calcul littéral au collège. Quelle articulation entre sens et technique ? In : Colloque de la CORFEM (2009), https ://halshs.archives-ouvertes.fr/halshs-00959612
9. Delmas-Rigoutsos, Y. : Proposition de structuration historique des concepts de la pensée informatique fondamentale. In : Parriaux, G., Pellet, J.P., Baron, G.L., Bruillard, É., Komis, V. (eds.) Didapro 7 – DidaSTIC. De 0 à 1 ou l'heure de l'informatique à l'école. Peter Lang, Bern, Lausanne (2018)
10. Delmas-Rigoutsos, Y. : Quantum modalities, interpretation of Quantum Mechanics and Special Relativity, and an experimental test for multiple worlds. soumis (2020), https ://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01983757
11. Dhombres, J., Dahan-Dalmedico, A., Bkouke, R., Houzel, C., Guillemot, M. : Mathématiques au fil des âges. Gauthier-Villars (1987), recueil de textes commentés.
12. Favrat, J.F., Munier, V. : évolution de l'enseignement des grandeurs à l'école élémentaire depuis 1945. Repères IREM **68**, 51–75 (2007)
13. Girard, J.Y., Taylor, P., Lafont, Y. : Proofs and types. No. 7 in Cambridge tracts in theoretical computer science, Cambridge univ. pr. (2003 (1989)), http ://www.paultaylor.eu/stable/prot.pdf, web reprint
14. Lakatos, I. : Preuves et réfutations. Hermann (1984 (1976))
15. MEN : Programme du cycle 2. Éduscol (2018), arrêté du 17-07-2018
16. MEN : Programme du cycle 4. Éduscol (2018), arrêté du 17-07-2018
17. Munier, V., Passelaigue, D. : Réflexions sur l'articulation entre didactique et épistémologie dans le domaine des grandeurs et mesures dans l'enseignement primaire et secondaire. Tréma **38** (2012)
18. Norton, J.D. : General covariance and the foundations of general relativity : eight decades of dispute. Reports on Progress in Physics **56**(7), 791–858 (jul 1993). https://doi.org/10.1088/0034-4885/56/7/001
19. Passelaigue, D. : Grandeurs et mesures à l'école élémentaire. Des activités de comparaison à la construction des concepts : le cas de la masse en CE1. Ph.D. thesis, Université Montpellier 2 (2011)
20. Perdijon, J. : La mesure. No. 186 in coll. Dominos, Flammarion (1998)
21. Pressiat, A. : La place des grandeurs dans la construction des mathématiques. Bulletin de l'APMEP (483), 467–490 (2009)
22. Rovelli, C. : Quantum spacetime : what do we know. In : Callender, C., Huggett, N. (eds.) Physics meets philosophy at the Planck scale. Cambridge Univ. Pr. (2001)
23. Séré, M.G. : La mesure dans l'enseignement des sciences physiques : évolution au cours du temps. Aster **47**, 25–42 (2008)
24. Spinellis, D. : Beautiful code : leading programmers explain how they think, vol. 17, chap. Another level of indirection, pp. 279–291. O'Reilly (2007), http ://www.academia.edu/download/30699875/Spi07g.pdf
25. Zilles, C. : "What does a CPU have in common with a fast food restaurant ?" A reflection on emphasizing the big ideas of computer science in a computer organization class. In : Proceedings Frontiers in Education 35th Annual Conference. pp. S3C–11 (Oct 2005). https://doi.org/10.1109/FIE.2005.1612263